

GEOMETRI ANALITIK (LINGKARAN)

Topik	Pusat (0,0)	Pusat (a,b)	Bentuk Umum $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$
Persamaan Lingkaran	$x^2 + y^2 = r^2$	$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$	$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$
Pusat dan Jari-jari	Pusat (0,0) Jari-jari r	Pusat (a,b) Jari-jari r	Pusat $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ Jari-jari $r = \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C}$
Kedudukan Titik $P(x_1, y_1)$	Substitusikan P ke persamaan: • $x_1^2 + y_1^2 > r^2$ (Di luar) • $x_1^2 + y_1^2 = r^2$ (Pada) • $x_1^2 + y_1^2 < r^2$ (Di dalam)	Substitusikan P ke persamaan: • $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 > r^2$ (Di luar) • $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2$ (Pada) • $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 < r^2$ (Di dalam)	Substitusikan P ke persamaan: • $x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + C > 0$ (Di luar) • $x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + C = 0$ (Pada) • $x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + C < 0$ (Di dalam)
Kedudukan Garis g	Dengan metode diskriminan (D) atau jarak (d) pusat ke garis: • $D > 0$ atau $d < r$ (Memotong di 2 titik) • $D = 0$ atau $d = r$ (Menyinggung) • $D < 0$ atau $d > r$ (Tidak memotong)	Sama seperti di pusat (0,0), sesuaikan pusat (a,b) dan jari-jari r . • $D > 0$ atau $d < r$ (Memotong di 2 titik) • $D = 0$ atau $d = r$ (Menyinggung) • $D < 0$ atau $d > r$ (Tidak memotong)	Sama seperti di pusat (0,0), sesuaikan pusat $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ dan jari-jari r . • $D > 0$ atau $d < r$ (Memotong di 2 titik) • $D = 0$ atau $d = r$ (Menyinggung) • $D < 0$ atau $d > r$ (Tidak memotong)

Catatan: D adalah Diskriminan, $D = b^2 - 4ac$

Persamaan Garis Singgung Lingkaran

Jenis Informasi	Pusat (0,0), Persamaan $x^2 + y^2 = r^2$	Pusat (a,b), Persamaan $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$	Bentuk Umum, Persamaan $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$
Garis Singgung di Titik (x_1, y_1)	$x_1x + y_1y = r^2$	$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$	$x_1x + y_1y + \frac{A}{2}(x_1 + x) + \frac{B}{2}(y_1 + y) = -C$
Garis Singgung dengan Gradien m	$y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$	$y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{m^2 + 1}$	Hitung pusat $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ dan jika terlebih dahulu, lalu masukkan ke bentuk pusat (a, b) .

Contoh Soal 1: kasus lingkaran pusat (0,0) dan jari-jari r

Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di titik $O(0,0)$ dan berjari-jari 5.

Pembahasan:

Persamaan umum lingkaran dengan pusat $O(0,0)$ dan jari-jari r adalah $x^2 + y^2 = r^2$.

Karena jari-jari lingkaran adalah $r = 5$, maka kita tinggal memasukkan nilai tersebut ke dalam rumus.

$$x^2 + y^2 = 5^2$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

Jadi, persamaan lingkarannya adalah $x^2 + y^2 = 25$.

Diketahui lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 = 25$. Tentukan kedudukan titik-titik berikut terhadap lingkaran tersebut:

- a. $P(3, 4)$
- b. $Q(-2, 5)$
- c. $R(6, -1)$

Pembahasan:

Substitusikan koordinat setiap titik ke dalam persamaan lingkaran.

- **Titik $P(3, 4)$:**

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

Karena $25 = 25$, maka titik P **terletak pada lingkaran**.

- **Titik $Q(-2, 5)$:**

$$(-2)^2 + 5^2 = 4 + 25 = 29$$

Karena $29 > 25$, maka titik Q **berada di luar lingkaran**.

- **Titik $R(6, -1)$:**

$$6^2 + (-1)^2 = 36 + 1 = 37$$

Karena $37 > 25$, maka titik R **berada di luar lingkaran**.

Tentukan kedudukan garis $g : x - 2y + 5 = 0$ terhadap lingkaran $x^2 + y^2 = 25$.

Pembahasan:

Gunakan metode substitusi untuk mendapatkan persamaan kuadrat, lalu hitung diskriminannya (D).

1. **Substitusikan** persamaan garis ke persamaan lingkaran. Ubah persamaan garis menjadi $x = 2y - 5$.

$$(2y - 5)^2 + y^2 = 25$$

$$4y^2 - 20y + 25 + y^2 = 25$$

$$5y^2 - 20y + 20 = 0$$

$$y^2 - 4y + 4 = 0$$

2. **Hitung diskriminan** ($D = b^2 - 4ac$) dari persamaan kuadrat $y^2 - 4y + 4 = 0$.

$$D = (-4)^2 - 4(1)(4)$$

$$D = 16 - 16 = 0$$

Karena $D = 0$, maka garis **menyentuh** lingkaran di satu titik.

Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ yang melalui titik $(3, 4)$

Pembahasan

Dari soal, kita tahu:

- $x_1 = 3$
- $y_1 = 4$
- $r^2 = 25$

Substitusikan nilai-nilai tersebut ke dalam rumus:

$$(3)x + (4)y = 25$$

$$3x + 4y = 25$$

Jadi, persamaan garis singgungnya adalah $3x + 4y = 25$.

Contoh Soal 2: kasus lingkaran pusat (a,b) dan jari-jari r

Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di titik $P(2, -3)$ dan berjari-jari $r = 4$.

Pembahasan:

Persamaan lingkaran dengan pusat (a, b) dan jari-jari r adalah $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Substitusikan nilai pusat $a = 2$, $b = -3$ dan jari-jari $r = 4$.

$$(x - 2)^2 + (y - (-3))^2 = 4^2$$

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$$

Jadi, persamaan lingkarannya adalah $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$.

Diketahui lingkaran dengan persamaan $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$. Tentukan kedudukan titik-titik berikut terhadap lingkaran tersebut:

- a. $A(5, -3)$
- b. $B(1, 0)$
- c. $C(0, -1)$

Pembahasan:

Substitusikan koordinat setiap titik ke dalam persamaan lingkaran.

- **Titik $A(5, -3)$:**

$$(5 - 2)^2 + (-3 + 3)^2 = 3^2 + 0^2 = 9$$

Karena $9 < 16$, maka titik **A berada di dalam lingkaran**.

- **Titik $B(1, 0)$:**

$$(1 - 2)^2 + (0 + 3)^2 = (-1)^2 + 3^2 = 1 + 9 = 10$$

Karena $10 > 16$, maka titik **B berada di luar lingkaran**.

- **Titik $C(0, -1)$:**

$$(0 - 2)^2 + (-1 + 3)^2 = (-2)^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8$$

Karena $8 < 16$, maka titik **C berada di dalam lingkaran**.

Tentukan kedudukan garis $g : x - y + 1 = 0$ terhadap lingkaran $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$.

Pembahasan (Menggunakan metode diskriminan):

1. **Substitusikan** persamaan garis ke persamaan lingkaran. Ubah persamaan garis menjadi $y = x + 1$.

$$(x - 2)^2 + ((x + 1) + 3)^2 = 16$$

$$(x - 2)^2 + (x + 4)^2 = 16$$

$$(x^2 - 4x + 4) + (x^2 + 8x + 16) = 16$$

$$2x^2 + 4x + 20 = 16$$

$$2x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$x^2 + 2x + 2 = 0$$

2. **Hitung diskriminan** ($D = b^2 - 4ac$) dari persamaan kuadrat $x^2 + 2x + 2 = 0$.

$$D = 2^2 - 4(1)(2) = 4 - 8 = -4$$

Karena $D = -4 < 0$, maka garis **tidak memotong** dan **tidak menyinggung** lingkaran.

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$ yang melalui titik $(2, 1)$.

Dari soal, kita tahu:

- Pusat $(a, b) = (2, -3)$
- Titik singgung $(x_1, y_1) = (2, 1)$
- $r^2 = 16$

Substitusikan nilai-nilai tersebut ke dalam rumus:

$$(2 - 2)(x - 2) + (1 - (-3))(y - (-3)) = 16$$

$$(0)(x - 2) + (1 + 3)(y + 3) = 16$$

$$0 + 4(y + 3) = 16$$

$$4y + 12 = 16$$

$$4y = 4$$

$$y = 1$$

Jadi, persamaan garis singgungnya adalah $y = 1$.

Contoh Soal 3: persamaan Umum Lingkaran

Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$

Dari persamaan $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$, kita dapatkan:

- $A = -6$
- $B = 8$
- $C = -11$

Rumus untuk mencari koordinat pusat (a, b) adalah:

$$a = -\frac{A}{2}$$

$$b = -\frac{B}{2}$$

Substitusikan nilai A dan B :

$$a = -\frac{-6}{2} = 3$$

$$b = -\frac{8}{2} = -4$$

Jadi, pusat lingkaran adalah $(3, -4)$.

Rumus untuk mencari jari-jari r adalah:

$$r = \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C}$$

Substitusikan nilai A , B , dan C :

$$r = \sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^2 + \left(\frac{8}{2}\right)^2 - (-11)}$$

$$r = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2 + 11}$$

$$r = \sqrt{9 + 16 + 11}$$

$$r = \sqrt{36}$$

$$r = 6$$

Tentukan kedudukan titik $A(5, -1)$ terhadap lingkaran $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$. 

Pembahasan:

Substitusikan koordinat titik $A(5, -1)$ ke dalam persamaan lingkaran.

$$\begin{aligned}5^2 + (-1)^2 - 6(5) + 8(-1) - 11 \\= 25 + 1 - 30 - 8 - 11 \\= 26 - 30 - 8 - 11 \\= -4 - 8 - 11 = -23\end{aligned}$$

Karena hasil substitusi adalah -23 , dan $-23 < 0$, maka titik $A(5, -1)$ **berada di dalam lingkaran**.

Tentukan kedudukan garis $g : x + y - 4 = 0$ terhadap lingkaran $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$. 

Pembahasan:

Kita akan menggunakan metode diskriminan. 

1. **Substitusikan** persamaan garis ke persamaan lingkaran. Ubah persamaan garis menjadi $y = 4 - x$.

$$\begin{aligned}x^2 + (4 - x)^2 - 6x + 8(4 - x) - 11 &= 0 \\x^2 + (16 - 8x + x^2) - 6x + 32 - 8x - 11 &= 0 \\(x^2 + x^2) + (-8x - 6x - 8x) + (16 + 32 - 11) &= 0 \\2x^2 - 22x + 37 &= 0\end{aligned}$$

2. **Hitung diskriminan** ($D = b^2 - 4ac$).

$$D = (-22)^2 - 4(2)(37)$$

$$D = 484 - 296 = 188$$

Karena $D = 188 > 0$, maka garis **memotong** lingkaran di dua titik yang berbeda. 

Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$ yang melalui titik $(9, -4)$.

Rumus persamaan garis singgung di titik (x_1, y_1) pada lingkaran bentuk umum adalah:

$$x_1x + y_1y + \frac{A}{2}(x_1 + x) + \frac{B}{2}(y_1 + y) + C = 0$$

Dari persamaan lingkaran, kita tahu $A = -6$, $B = 8$, $C = -11$.

Dari titik singgung, kita tahu $x_1 = 9$, $y_1 = -4$.

Substitusikan nilai-nilai tersebut ke dalam rumus:

$$9x + (-4)y + \frac{-6}{2}(9 + x) + \frac{8}{2}(-4 + y) + (-11) = 0$$

$$9x - 4y - 3(9 + x) + 4(-4 + y) - 11 = 0$$

$$9x - 4y - 27 - 3x - 16 + 4y - 11 = 0$$

$$(9x - 3x) + (-4y + 4y) + (-27 - 16 - 11) = 0$$

$$6x + 0y - 54 = 0$$